

Radiale Temperaturverteilung in einer dünnen Linse aufgrund Absorption und Wärmeleitung

Michael Moritz

Optical Design, R&D, QIOPTIQ Photonics GmbH & Co. KG
Hans-Riedel-Str. 9, D-85622 Feldkirchen

mailto:michael.moritz@qioptiq.de

Es werden die Grundlagen einer einfachen Näherungstheorie beschrieben, die es erlaubt, die Temperaturverteilung in einer dünnen Linse aufgrund von Wärmeleitung und Absorption zu bestimmen.

1 Ein schneller Weg zur radialen Temperaturverteilung

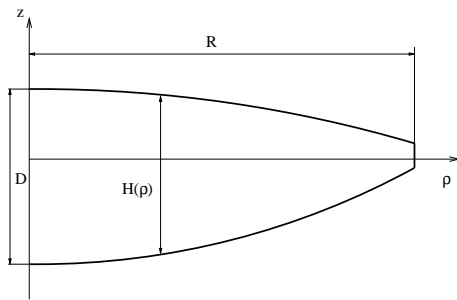


Abb. 1 Schematische Darstellung der Linse

Wir betrachten das innere Volumen einer Linse, das durch den Zylinder-Mantel der Höhe $H(\rho)$ begrenzt wird. Wenn darin durch Absorption die Wärmeleistung N produziert wird, erhöht sich entweder die Temperatur, oder die Wärme fließt ab:

$$\dot{Q} + J = N \stackrel{\dot{Q}=0}{\Rightarrow} J = N, \quad (1)$$

wobei die letzte Gleichung im stationären Fall gilt. ν ist die Wärmeleistungsdichte:

$$\begin{aligned} N &= \iiint \nu \, dV = 2\pi \cdot \int_0^\rho d\rho'' \cdot \rho'' \int_0^{H(\rho'')} \nu(\rho'', z) \, dz \\ &= 2\pi \cdot \int_0^\rho d\rho'' \cdot \rho'' \cdot H(\rho'') \cdot \bar{\nu}(\rho''). \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei habe ich definiert:

$$\bar{\nu}(\rho) = \frac{1}{H(\rho)} \int_0^{H(\rho)} \nu(\rho, z) \, dz. \quad (3)$$

Wir nehmen nun (vorläufig) an, dass der Abtransport der Wärme hauptsächlich durch Wärmeleitung in der Linse, d.h. durch die Zylinder-Mantelflächen geschieht (λ ist die thermische Leitfähigkeit):

$$J = -\lambda \iint \nabla T \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \bar{J} = -2\pi \cdot \rho \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} \cdot H(\rho). \quad (4)$$

Daraus erhalten wir unmittelbar einen Ausdruck für die radiale Temperatur-Verteilung:

$$\bar{T}(\rho) = \bar{T}|_{\rho=\rho_0} - \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\rho_0}^\rho \frac{d\rho'}{\rho' \cdot H(\rho')} \int_0^{\rho'} d\rho'' \cdot \rho'' \cdot H(\rho'') \cdot \bar{\nu}(\rho''). \quad (5)$$

Ähnliche Ausdrücke findet man in der Literatur, siehe z.B. [1], [2], [3].

2 Die modifizierte Wärmeleitungsgleichung

Die Energiebilanz in einem ringförmigen Volumenelement mit Radius ρ , Dicke $d\rho$ und Höhe $H(\rho)$ liefert:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{T}}{d\rho} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{d\bar{T}}{d\rho} = -\frac{\bar{\nu}(\rho)}{\lambda}. \quad (6)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist identisch mit Gl.(5). Statt des Terms, der von der Änderung der Höhe abhängt, tritt in der Standard-Wärmeleitungsgleichung die zweite Ableitung nach z als Summand auf. Dafür hat man es dort mit komplizierteren Randbedingungen zu tun, derer wir uns in unserer Näherung entledigt haben. Hier haben wir nur rotationssymmetrische Situationen betrachtet und den Wärmeübergang zur Umgebung vernachlässigt. Zur eindeutigen Bestimmung der Lösung von Gl.(6) benötigt man den Wert der Temperatur an einer Stelle $\bar{T}|_{\rho=\rho_0}$ oder den thermischen Anschluß an die Fassung. Der Gradient der Temperatur ist hier davon unabhängig. In der Nähe der Linsenmitte hat man ein parabolisches Temperatur-Profil; insbesondere verschwindet die Ableitung, was aufgrund der Symmetrie zu erwarten war. Der Wärmestrom aus dem Rand der Linse ist exakt gleich der in der Linse deponierten Leistung. Im Grenzfall einer dünnen, planparallelen Platte gilt Gl.(6) exakt.

3 Die Wärmequellendichte

Nimmt man an, dass die Schwächung der Bestrahlungsstärke I dem Lambert-Beer-Gesetz folgt

$$I(\rho, z) = I(\rho) \cdot \exp(-\alpha \cdot z), \quad (7)$$

und dass diese gesamte Leistung in Wärme umgesetzt wird, findet man:

$$\bar{v}(\rho) = \frac{\alpha \cdot I(\rho)}{H(\rho)} \int_0^{H(\rho)} dz \exp(-\alpha \cdot z) \approx \alpha \cdot I(\rho). \quad (8)$$

Die letzte Gleichung ist gültig für $\alpha \cdot H(\rho) \ll 1$, d.h. für schwache Absorption (was normalerweise bei einer geeigneten Glasauswahl sehr gut erfüllt ist).

4 Vergleich mit der numerischen Lösung

Als Beispiel betrachten wir eine konvex-Linse (Mittendicke: 20 mm, Randdicke 5 mm, Durchmesser 100 mm), die von einem Gauß-Strahl mit $1/e^2$ -Radius 20 mm beleuchtet wird.

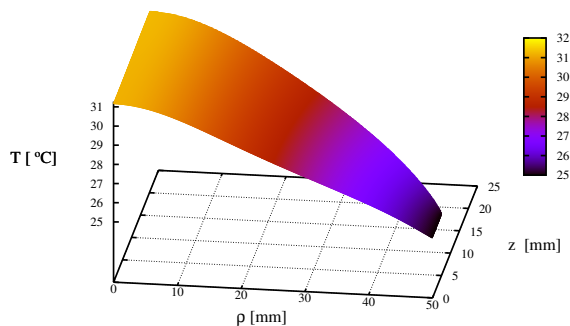


Abb. 2 Numerische Lösung der Standard-Wärmeleitungsgleichung. Die Variation von T entlang z ist klein verglichen mit derjenigen entlang ρ .

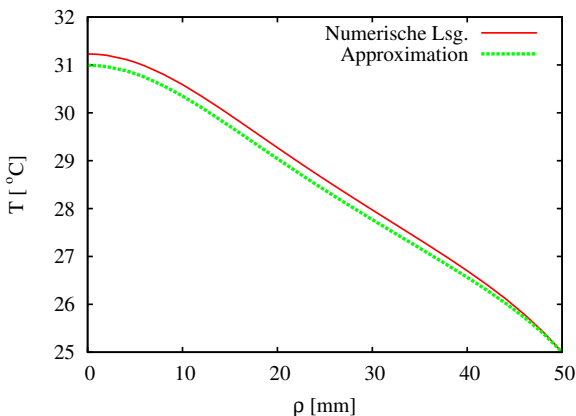


Abb. 3 Vergleich der numerischen Lösung der Standard-Wärmeleitungsgleichung (arithmetischer Mittelwert über die z -Richtung) mit unserer Näherung.

5 Wärmeaustausch mit der Umgebung

Will man den Wärmeaustausch mit der Umgebung erfassen, so muß man auch die Wärmeströme durch die Flächenelemente dA der optischen Oberflächen berücksichtigen. Ein Beitrag stammt von der Wärmestrahlung:

mestrahlung:

$$dP = dA \cdot \epsilon(T) \cdot \sigma \cdot [T^4 - T_U^4] \approx dA \cdot \epsilon(T) \cdot 4 \cdot \sigma \cdot T_U^3 [T - T_U], \quad (9)$$

dabei ist T_U die Umgebungstemperatur [K]; für poliertes Glas ist $\epsilon(T) \approx 0.9$ und σ ist die Stefan-Boltzmann Konstante. Die Linearisierung gilt für nicht zu große Temperaturdifferenzen. Eine Verallgemeinerung, die trotz der sehr unterschiedlichen physikalischen Mechanismen den gesamten Wärmefluß zur Umgebung erfaßt, ist durch das Newton'sche Abkühlungsgesetz gegeben [4]:

$$dJ_N = \alpha_N \cdot dA \cdot [T - T_U]. \quad (10)$$

Man kann eine modifizierte Wärmeleitungsgleichung mit Berücksichtigung des Wärmeaustausches formulieren, wobei es dafür grundsätzlich egal ist, ob man hier zur Beschreibung den Newton'schen Wärmestrom, Stefan-Boltzmann oder andere einschlägige Gesetze benutzt. Die Behandlung eines Kittgliedes ist konzeptionell ähnlich und führt auf ein System gekoppelter Differentialgleichungen.

6 Schlußbemerkungen

Die hier skizzierte Theorie kann man verallgemeinern: durch Betrachtung eines Volumenelementes in Polar-Koordinaten kann man auch für nicht-rotations-symmetrische Situationen eine modifizierte Wärmeleitungsgleichung angeben.

Alle Temperatur-Simulationen basieren letztlich auf Modell-Annahmen und bedürfen einer ausreichenden Datengrundlage bzw. Klärung der Wichtigkeit der einzelnen Effekte. Ein besseres Verständnis wäre z.B. wünschenswert bei der Betrachtung des Wärmedurchgangs bzw. der Absorption von Kittschichten, der Emissivität und Absorption von Coatings bzw. der Oberfläche, des Anteils der Streuung im Glas, des Wärmeflusses zur Linsenfassung bei speziellen Montage-Technologien bis hin zum Wärmetransport durch Strahlung z.B. auch innerhalb der Linse.

Die Temperaturverteilung verursacht eine GRIN-Linse; sie kann je nach Anwendung sogar ein Vorteil sein, sofern sie zuverlässig zu berechnen ist.

Literatur

- [1] B. Aebischer, "Heat Conduction in Lenses," Mathematical Problems in Engineering (2007). Doi:10.1155/2007/57360 ID 57360, 28 pages.
- [2] C. A. Klein, "High-power CW Laser Windows: Edge-Cooled or Face-Cooled?" Proc. of SPIE (High Heat Flux Engineering) **1739**, 230 (1993).
- [3] R. Tangelder, L. Beckmann, and J. Meijer, "Influence of temperature gradients on the performance of ZnSe-lenses," Proc. of SPIE (Lens and Optical Systems Design) **1780**, 294 (1993).
- [4] M. Vollmer, "Newton's law of cooling revisited," Eur. J. Phys. **30**, 1063 (2009).