Bewertung der optischen Güte mit Hilfe der axialen Punktbildfunktion

Joerg Sprenger

Carl Zeiss Microscopy GmbH
Königsallee 9-21, 37081 Göttingen

mailto:joerg.sprenger@zeiss.com

Ausgehend von der idealen Intensitätsverteilung bei Fraunhoferscher Beugung an einer Kreisblende, stellvertretend für die Austrittspupille eines optischen Systems, soll der Einfluss von sphärischer Aberration mit und ohne Apodisierung in dieser untersucht werden.

1 Einführung

Anwendungen in der Auflichtmikroskopie, insbesondere der 3D-Konfokal-Auswertung im Nanometerbereich, stellen an die optische Güte der Objektive infolge der Verwendung im doppelten Durchgang erhöhte und spezielle Anforderungen. Neben Polarisations-, Temperatur- und Umgebungseffekten sind bereits für den Achspunkt, je nach Pupillendurchmesser, Einflüsse der Apodisierung sowie geringer Restaberrationen bemerkbar. Um die einzelnen Effekte voneinander trennen zu können, sollen im Folgenden analytische Ausdrücke entlang der optischen Achse abgeleitet werden. Damit wird gegenüber der Abtastung mit dem Pinhole eine Näherung vorgenommen und nicht die Encircled Energy bzw. die totale Beleuchtung verfolgt. Da in der Praxis Pinholegrößen von kleiner als 1/3 Airy-Durchmesser für hohe z-Auflösungen verwendet werden und hier nur rotationssymmetrische Pupillenfunktionen untersucht werden sollen, wird sich auf die Analyse des Verlaufs der Point Spread Function (PSF) oder Punktbildverwaschungsfunktion entlang der optischen Achse beschränkt.

2 Die ideale Intensitätsverteilung

Ausgehend von der Beschreibung der räumlichen Intensitätsverteilung in Fokusnähe nach „Principles of Optics“ von M. Born und E. Wolf [1] folgt für die Lichterregung a mit den Koordianten u, v im Bildraum:

$$a(u,v) \sim \iint_{0\,0}^{1\,2\pi} P(\rho,\varphi) e^{-i\left(v\rho\cos(\varphi-\psi)+\frac{u}{2}\rho^2\right)} \rho d\rho d\varphi \quad (1)$$

Mit $P(\rho,\varphi)$ sei die Pupillenfunktion bezeichnet, die im idealen Fall eins zu setzen ist, damit ergibt sich die bereits von Lommel 1886 gefundene Lösung:

$$aa^*{}_N = \left(\frac{2}{u}\right)^2 \{U_1^2(u,v) + U_2^2(u,v)\} \quad (2)$$

mit Hilfe der sogenannten Lommel-Funktionen:

$$U_n(u,v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{u}{v}\right)^{n+2s} J_{n+2s}(v) \quad (3)$$

und bilden der normierten Intensität $aa^*(0,0)_N = 1$.

Für die normierte Intensität in der Fokusebene ergibt sich:

$$aa^*{}_N(0,v) = \left(\frac{2J_1(v)}{v}\right)^2 \quad (4)$$

und entlang der optischen Achse:

$$aa^*{}_N(u,0) = \left(\frac{\sin(u/4)}{u/4}\right)^2 \quad (5)$$

3 Die Intensitätsverteilung bei Apodisierung

Unter Apodisierung sei im Folgenden eine inhomogene Intensitätsverteilung in der Austrittspupille zu verstehen, die sich als reine Amplitude in der Pupillenfunktion erfassen lässt. Für gaussförmige Pupillenfunktionen und Auswertungen entlang der optischen Achse ergibt sich aus Integral (1):

$$a(u) \sim 2\int_0^1 e^{-\gamma\rho^2}\, e^{-i\frac{u}{2}\rho^2} \rho d\rho \quad (6)$$

und damit die normierte Intensitätsverteilung entlang der optischen Achse:

$$aa^*(u)_N = \frac{2\gamma^2(\cosh(\gamma)-\cos(u/2))}{sinh(\gamma/2)^2(u^2+4\gamma^2)}. \quad (7)$$

Es handelt sich hierbei, wie bei der sinc²-Funktion für die ideale Intensitätsverteilung bei homogener Pupillenfunktion, um eine symmetrische on $aa^*(u)_N = aa^*(-u)_N$, deren Minima und Nebenmaxima mit steigendem Apodisierungsfaktor γ anwachsen und schließlich auch in z-Richtung zu einer Apodisation führt.

4 Die Intensitätsverteilung bei Anwesenheit sphärischer Aberrationen

Die sphärische Aberration ist gerade in der Mikroskopie einer der primären Fehler, der bereits durch geringe Abweichungen vom Arbeitspunkt des Objektivs sowie von Objektraum- und Temperaturbedingungen zustande kommt. Beginnend mit der sphärischen Aberration 3. Ordnung, lässt sich Integral (1) analog zu Integral (6) darstellen, anstelle der Amplitude wird der Phasenterm der Pupillenfunktion $P(\rho)$ verwendet:

$$a(u) \sim 2 \int_0^1 e^{-i\frac{u}{2}\rho^2} e^{-i\,s(6\rho^4-6\rho^2+1)} \rho d\rho \qquad (8)$$

Hierbei wurde statt der reinen sphärischen Wellenaberration mit ρ^4 das entsprechende Zernike-Polynom benutzt und somit ein Nachfokussieren in die beste Einstellebene bewerkstelligt. Mit der Substitution $z = \rho^2$ und anschließender quadratischer Ergänzung:

$$y = \sqrt{6\,i\,s}\,z - \frac{6\,i\,s + i\,u/2}{2\sqrt{6\,i\,s}} \qquad (9)$$

folgt für die normierte Intensität:

$$aa^*(u)_N = \frac{\pi}{24|s|} \left| Erf\left(\frac{u/4+3s}{\sqrt{6\,i\,s}}\right) - Erf\left(\frac{u/4-3s}{\sqrt{6\,i\,s}}\right) \right|^2 \quad (10)$$

wobei der Ausdruck s den Betrag des Wellenvektors und den Zernike-Koeffizienten C9 beinhaltet. Auch bei dieser Funktion handelt es sich infolge der Punktsymmetrie der Error-Funktion um eine symmetrische Funktion in z-Richtung.

Ein unsymmetrischer Verlauf der z-PSF tritt hingegen bei sphärischer Aberration 5. Ordnung auf. Das Integral geht nach geeigneter Substitution der zugehörigen Wellenaberration ρ^6 in Verbindung mit dem quadratischen Term zur Fokussierung $\frac{u}{2}\rho^2$ in ein unvollständiges Airy-Integral mit entsprechend unsymmetrischem Verhalten über [2].

5 Die Intensitätsverteilung unter Berücksichtigung sphärischer Aberration und Apodisierung

Geht man nun zu konfokalen Anwendungen über, soll zusätzlich zur Betrachtung der sphärischen Aberration der Einfluss einer im Normalfall inhomogenen Laserbeleuchtung untersucht werden. Hierzu werden die Integrale (6) und (8) zusammengefasst zu:

$$a(u) \sim 2 \int_0^1 e^{-\gamma\rho^2}\, e^{-i\frac{u}{2}\rho^2} e^{-i\,s(6\rho^4-6\rho^2+1)} \rho d\rho \quad (11)$$

Mit einer erneuten Substitution $z = \rho^2$ und einer Erweiterung der quadratischen Ergänzung um den Amplitudenanteil der Apodisierung:

$$y = \sqrt{6\,i\,s}\,z - \frac{6\,i\,s + i\,u/2 + \gamma}{2\sqrt{6\,i\,s}} \qquad (12)$$

lässt sich für die z-PSF ein von den Parametern s für die sphärische Aberration 3.Ordnung und γ für den Abfall der Amplitude in der Austrittspupille abhängiger geschlossener Ausdruck finden:

$$aa^*(u)_N = \frac{\pi\,\gamma^2}{96\,sinh(\gamma/2)^2|s|} * e^{-\frac{\gamma}{12\,s}u} * \left| Erf\left(\frac{u/4-3s-2\gamma}{\sqrt{6\,i\,s}}\right) - Erf\left(\frac{u/4+3s-2\gamma}{\sqrt{6\,i\,s}}\right) \right|^2 \qquad (13)$$

Im Gegensatz zum Intensitätsverlauf für reine sphärische Aberration 3. Ordnung kommt es sowohl durch den Vorfaktor als auch durch die Unsymmetrie im Argument der Error-Funktion zu einem unsymmetrischen Intensitätsverlauf. Während durch die sphärische Aberration weiterhin eine Reduzierung des Hauptmaximums und Erhöhung der Nebenmaxima hervorgerufen wird, bewirkt die Apodisierung ein einseitiges Ansteigen der Nebenminima und so das Ausbilden einer Flanke. Solche verbreiterten unsymmetrischen Signale sind jedoch bei der Z-Stack-Auswertung in der Topographie sowie bei Schichtdickenmessungen im Nanometerbereich kritisch und müssen je nach Anwendung begrenzt werden.

6 Nachtrag zum unsymmetrischen Verhalten infolge kleiner bildseitiger Aperturen

Während bei großen beugenden Öffnungen das Huygens-Prinzip angewendet werden kann, bewirken bei kleinen Öffnungen die Randzonen ein abweichendes Verhalten, welches zum Rayleigh-schen Beugungsintegral führt. Für axiale Punkte kann nach H. Osterberg [3] eine geschlossene Lösung gefunden werden, die bereits für Aperturen kleiner 0.1 eine unsymmetrische z-PSF zeigt, jedoch bei kleiner beugenden Öffnung bzw. geringem Abstand zwischen Blende und Empfänger. Bei bildgebenden Optiken mit kleinen Aperturen ist somit auf eine entsprechend lange Austrittspupillenlage zu achten, die letztendlich zu großen Durchmessern der beugenden Öffnung, unabhängig von der verwendeten Brennweite, führt.

Literatur

[1] M. Born, E. Wolf: Principles of Optics, 7th edition (Cambridge University Press, 2003)

[2] J. Focke: Wellenoptische Untersuchungen zum Öffnungsfehler (Opt. Acta, 1956)

[3] H. Osterberg, L. W. Smith: Closed Solutions of Rayleigh's Diffraction Integral for Axial Points (JOSA Vol. 51, 10, 1961)