Physikalische Aspekte der Huygensschen Elementarwellentheorie

E.Frins*, J.Ferrari*, B.Hils**, D.Dietrich**, W.Dultz**, H.Schmitzer

Universidad de la República, Montevideo, Univ.Frankfurt(Main)**, Xavier Univ. Cincinnati*

requalivahanus(affenschaukel)t-online.de

Fehlende Bertrandkurven zu gewundenen (tordierten) Kurven regten uns dazu an, die Huygensschen Elementarwellen und ihre Theorie zu untersuchen. Dabei sind die Gouyphasen an Kaustiken und das Auftreten des Faktors „1/i" im Kirchhoff- und im Huygens-Fresnel Integral wichtige experimentelle und theoretische Schritte. Hier stellen wir Messungen der Gouyphase an einer astigmatischen Kalkspatlinse vor, wobei der Strahlenverlauf zwischen der meridionalen und der sagittalen Kaustik tordiert erscheint. In der Theorie kompensiert der Faktor „1/i" vor dem Huygens-Fresnel Integral die Phase einer unendlich weiten Aperturöffnung am Aufpunkt auf der Achse.

Die Gouyphase ist ein Schlüsseleffekt zur Untersuchung der Elementarwellen in Theorie und Experiment. Sie ist eine Konsequenz des Impulserhaltungssatzes [1,2] und tritt immer dann auf, wenn kohärente Strahlenbündel eingeengt werden, z.B. an den Brennpunkten von Linsen und allgemein an Kaustiken. Wir messen sie mit Hilfe der Polarisationsinterferometrie und einem Kompensator Abb.1 an den Kaustiken einer schräg gestellten, astigmatischen Kalkspatlinse [2]. Abb.2 zeigt die Interferenzstreifen in den verschiedenen Gebieten

Abb.1 Aufbau mit Kompensator und schiefer Linse

hinter der Linse sowie die Brennlinien. Im Unterschied zu Ref. [2] wurden die schnellen Brennlinien ins Unendliche verlegt, so daß das Zwischengebiet III vergrößert wurde und besser beobachtet werden konnte. Deutlich erkennt man den Gouyphasensprung von π zwischen Gebiet I und III. Gebiet II zeigt die erwartete Sattelpunktscharakteristik [2]. Die etwas flauen Interferenzstreifen im Gebiet II sind auf die Polarisationsverhältnisse und Pancharatnams Phase zurückzuführen. Mit Hilfe des Kompensators wurde die Gouyphase zwischen Gebiet II und III zu $(0.4 \pm 0.1)\pi$ gemessen in befriedigender Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert von 0.5π für eine Kaustik in der Ebene. Die Berechnung der Gouyphase erfolgt mit Hilfe des Huygens-Fresnel Integrals, das über das Kirchhoff Integral aus den maxwellschen Gleichungen abgeleitet wird.

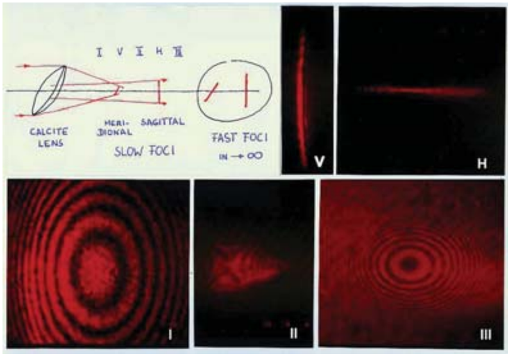

Abb.2 Brennlinien und Interferenzstreifen der schiefen Linse in ihren verschiedenen Gebieten.

Der Vorfaktor „1/i" beider Integrale, der wesentlich zum Eikonal ψ beiträgt, wird - wenig überzeugend - durch einen Phasensprung zwischen erregender und auslaufender Elementarwelle erklärt [3]. Nach einer Vermutung von Feng et al.[1] handelt es sich aber bei dem Faktor um eine Gouyphase. Dies zeigen wir mit Hilfe einer Methode nach Landau [4], der den 1/i - Faktor durch Vergleich der Amplitude einer ebenen Welle nach einer unendlich ausgedehnten Aperturblende mit sich selbst ableitet.

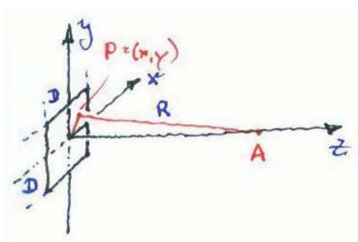

Abb.3 Berechnung der Gouyphase einer quadratischen Öffnung auf der Achse

Wir berechnen das Eikonal ψ einer ebenen Welle auf der Achse nach einer quadratischen Öffnung D^2 Abb.3, mit Hilfe des Huygens-Fresnelschen Integrals und vergleichen es mit dem der einfallenden ebenen Welle $\tilde{u}$.

DGaO Proceedings 2015 - http://www.dgao-proceedings.de - ISSN: 1614-8436 - urn:nbn:de:0287-2015-P014-3
eingereicht: 05.07.2015 - veröffentlicht: 19.08.2015

Die Amplitude am Aufpunkt *A* beträgt nach Huygens-Fresnel:

$$u_A = a\int\int_{-D/2}^{+D/2} df \cdot \tilde{u}\,\frac{e^{ikR}}{R}\ ; \qquad \tilde{u} = ue^{ikz}$$

Der Abstand vom Flächenelement df der Apertur zum Aufpunkt *A* wird genähert:

$$R = \overline{PA} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z};\ z >> x, y$$

$$u_A = a \cdot \tilde{u}(z=0)\frac{e^{ikz}}{z}\int_{-D/2}^{+D/2} dx \cdot e^{ik\frac{x^2}{2z}} \int_{-D/2}^{+D/2} dy \cdot e^{ik\frac{y^2}{2z}}$$

und die Integrale werden auf das Fresnel Integral gebracht:

mit $\frac{\pi}{2}\xi^2 = \frac{kx^2}{2z} bzw. = \frac{ky^2}{2z}$; $\Delta = D/2 \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi \cdot z}}$

$$u_A = 4a \cdot u\frac{\pi}{k}e^{ikz}\{\int_0^{\Delta}\cos(\frac{\pi}{2}\xi^2) + i\sin(\frac{\pi}{2}\xi^2)\}^2$$

$$u_A(D) = 4a \cdot u\frac{\pi}{k}e^{ikz}\{C(\frac{\pi}{2}\Delta^2) + iS(\frac{\pi}{2}\Delta^2)\}^2$$

C,S sind die tabellierten Fresnel Integrale [5]. Für eine unendlich weite Aperturöffnung $D \to \infty$ erhalten wir als Amplitude der Welle im Aufpunkt:

$$u_A = 4au\frac{\pi}{k}e^{ikz}\{1/2(1+i)\}^2 = au\frac{i2\pi}{k}e^{ikz}$$

Diese entspricht aber der einfallenden ebenen Welle $\tilde{u}$ und wir finden durch Vergleich wie Landau $a = \frac{k}{2\pi \cdot i}$. Nun können wir die Amplitude bei *A* für eine allgemeine Aperturöffnung D^2 angeben:

$$u_A(D) = 2ue^{ikz}\exp i\{2\arctan[S(\Delta)/C(\Delta)] - \pi/2\}$$

Die Phase φ in der geschweiften Klammer ist der Anteil des Eikonals $\psi = kz + \varphi$, der von der endlichen Aperturöffnung hervorgerufen und in Abb.4 dargestellt wird.

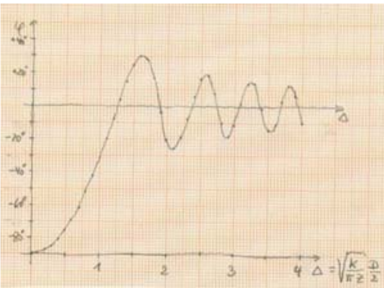

Abb.4 Eikonalanteil φ, der von der Apertur-öffnung abhängt

Der konstante Summand $\pi/2$ drückt den Wert von φ für eine sehr große Aperturöffnung auf Null und erreicht damit die Übereinstimmung der gebeugten auslaufenden Welle $u_A(D \to \infty)$ mit der ungebeugten, einlaufenden Welle $\tilde{u}$. Der Phasensprung $\pi/2$ tritt nun allerdings bei einer sehr kleinen Aperturöffnung auf, ein Effekt der experimentell überprüft werden sollte. Für größere Aperturen oszilliert die Phase φ dann mit langsam abnehmender Amplitude um ihren Grenzwert 0.

Bei dem Aufpunkt *A* Abb.3 handelt es sich dann um einen Punkt mit stationärer Phase und damit bei φ um eine Gouyphase, wenn $\psi(z)$ extremal ist. Dies ist besonders nahe dem ersten Maximum von φ bei $\Delta \approx 1{,}5$ in Abb.4 der Fall. Es liegt aber nahe, auch in den Gebieten zwischen den Punkten mit stationärer Phase von einer Gouyphase zu reden und damit den Begriff auf Gebiete ohne deutliche konstruktive Interferenz der Pfadintegrale anzuwenden. Wo aber liegt die Einengung des Strahlenbündels, die die Gouyphase als Folge der Impulserhaltung verursacht? Es kann sich nur um die Stelle handeln, an der die Strahlen am Aufpunkt *A* zusammengefasst werden und nicht um die Aperturöffnung selbst. Es ist interessant, daß diese Stelle allein durch eine spezielle, durch die Messung angelegte Auswahl von Strahlen unter vielen anderen möglichen zustande kommt. Kaustiken sind Gebiete stationärer Phase [4] und man kann bei ihnen ohne weiteres von Gouyphasen reden. Unser Experiment bestätigt das.

Der Faktor k im Vorfaktor a des Huygens-Fresnelschen Integrals verschwindet in der Amplitude $u_A(D)$ bei der Auswertung des Integrals und ist damit eher ein Skalenfaktor. Daß aufeinander folgende Elementarwellen ein Amplitudenverhältnis proportional k haben sollen [3] überzeugt nicht.

Wir hoffen mit unserer Analyse zum Verständnis des Huygensschen Elementarwellenmodells beigetragen zu haben. Die Propagation dieser Wellen in gewundenen Räumen ist damit nicht geklärt und wird Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

Danksagung

E.Frins und J.Ferrari danken dem PEDECIBA für die finanzielle Unterstützung

Literatur

[1] S.Feng,H.Winful ; Opt. Lett. **26** 485 (2001)

[2] DGaO-Proc. E.Frins et al.. 2014 Internet

[3] Born, Wolf, Chapter III §8.2

[4] Landau,Lifschitz II §59; Landau verwendet die Bezeichnung „Gouyphase“ nicht.

[5] Jahnke-Emde-Lösch Kapitel III.2