

Temporale Phasentfaltung für phasensensitive 3D-Messtechnik mittels zirkulärer Statistik

David Uhlig, Michael Heizmann

Institut für Industrielle Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe

mailto:david.uhlig@kit.edu

In phasensensenden 3D-Messverfahren wie Profilometrie und Deflektometrie werden häufig Multi-Frequenz-Verfahren mit temporal codierten Mustersequenzen eingesetzt, um die Messunsicherheit zu reduzieren. Hierbei entstehen jedoch Mehrdeutigkeiten. Wir stellen einen Ansatz vor, bei dem die Phase mithilfe einer probabilistischen Modellierung optimal rekonstruiert wird.

1 Einführung

Das Prinzip der strukturierten Beleuchtung wird in einer Vielzahl von Anwendungen der optischen 3D-Messtechnik eingesetzt. Dabei spielen phasensensitive Verfahren aufgrund ihrer hohen Messgenauigkeit und räumlichen Auflösung eine dominierende Rolle. Multi-Frequenz-Verfahren mit temporal codierten Sinusmustersequenzen werden häufig eingesetzt, um Phasenrauschen zu reduzieren und damit die Messergebnisse zu verbessern. Sie führen aber zu Mehrdeutigkeiten, die erst mit Methoden der Phasentfaltung aufgelöst werden können. In den meisten Anwendungen der Phasenschiebverfahren werden die Pixel eines Referenzmustergeräts mittels einer Musterreihe codiert. Eine Kamera beobachtet die strukturiert beleuchtete Szene und decodiert die Referenzpixel, was unter anderem zur Rekonstruktion der 3D-Gestalt genutzt werden kann. Eine normalisierte Pixel-Koordinate $x \in [0, 1]$ wird durch eine Serie von M sinusförmigen, phasenverschobenen Mustern mit der Phase $\Phi(x) = 2\pi fx$ codiert: $g_m(x) = A + B \cos(\Phi(x) + \Psi_m)$. Die Kamera beobachtet die Sequenz \tilde{g}_m mit $m = 0 \dots M - 1$, woraus nun die Phase $\varphi(x)$ geschätzt wird [1]:

$$a = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{g}_m \sin(\Psi_m), \quad b = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{g}_m \cos(\Psi_m), \quad (1)$$

$$\varphi = \text{atan2}(-a, b) \in [0, 2\pi). \quad (2)$$

Für symmetrische M -Schritt-Verfahren mit $\Psi_m = \frac{2\pi m}{M}$ kann die Unsicherheit $\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{2}{M} \frac{\sigma_I}{B}}$ der Phasemessung als Funktion des Bildrauschens σ_I angegeben werden, wobei $\hat{B} = \frac{2}{M} \sqrt{a^2 + b^2}$ die Modulation B des Signals schätzt [1]. Da bei gleich bleibendem Rauschen eine höhere Frequenz f des Sinusmusters die Phase über einen effektiv größeren Bereich $\Phi(x) \in [0, 2\pi f)$ spreizt, führt dies nach Rückskalierung zu einer um $1/f$ geringeren Unsicherheit. Für Frequenzen $f > 1$ kann die Phase jedoch nicht mehr eindeutig rekonstruiert werden, da sie Werte $\Phi > 2\pi$ annehmen kann, Glg. (2) aber nur auf den Bereich $\varphi \in [0, 2\pi)$ abbildet. Die Phase wird gefaltet

und es zeigen sich 2π -Unstetigkeiten, siehe Abb. 1. Damit ein kontinuierlicher Phasenverlauf erhalten werden kann, ist eine Entfaltung der Phase nötig.

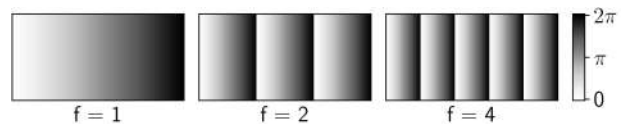


Abb. 1 Für $f > 1$ wird die Phase gefaltet und die Koordinate kann nicht mehr eindeutig decodiert werden.

2 Phasentfaltung

Temporale Phasentfaltungsmethoden verwenden mehrere Mustersequenzen mit unterschiedlichen Frequenzen f_i , um für jede Messung eine Phase $\varphi_i \in [0, 2\pi)$ zu erhalten. Abhängig von den Frequenzen sind die Phasenmessungen dabei unterschiedlich gefaltet. Das grundlegende Prinzip der Phasentfaltung ist es, pixelweise ein ganzzahliges Vielfaches von 2π auf die gefaltete Phase $\varphi_i(x)$ zu addieren oder dieses zu subtrahieren. Die entfaltete Phase $\Phi(x) = \varphi_i(x) + 2\pi k_i(x)$ ist dann frei von 2π -Unstetigkeiten. Hierfür existieren mehrere Ansätze [2]: Hierarchische Methoden z.B. vervielfachen die Frequenz nach jeder Messung und korrigieren Phasensprünge durch Information aus der letzten Phase. Zahlentheoretische Methoden rekonstruieren die Phase mithilfe des chinesischen Restwertsatzes, sind wegen der zu Grunde liegenden Ganzzahlarithmetik jedoch sehr störanfällig.

Die klassischen Algorithmen nutzen jedoch nicht die gesamte Information, um alle Phasenmessungen gleichzeitig zu entfalten, und weitaus bedeutender, sie beachten im Allgemeinen nicht die inhärent periodische Struktur der Phase, was zu fehlerhaften Entfaltungen führen kann. Weil die individuelle Phasenmessung von normalverteiltem Phasenrauschen beeinflusst wird, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der wahren Phase daher um den jeweiligen Messwert zentriert. Damit alle Phasenmessungen abhängig von ihrer Unsicherheit gleichzeitig in der Entfaltung berücksichtigt werden können,

suchen wir die Phase, welche mit maximaler Wahrscheinlichkeit die einzelnen Messungen verursacht hat. Da jedoch die Phase eine periodische Struktur aufweist, muss sie mithilfe der zirkulären Statistik modelliert werden, wobei das zirkuläre Äquivalent zur Normalverteilung die Von-Mises-Verteilung ist [3]. Daher modellieren wir die Phase $\varphi \in [0, 2\pi)$ mithilfe der Von-Mises-Dichtefunktion $p(\varphi|\varphi_i, \kappa_i) = \frac{e^{\kappa_i \cos(\varphi - \varphi_i)}}{2\pi I_0(\kappa_i)}$. Hierbei steht φ_i für die gemessene Phase, $I_0(\kappa_i)$ ist die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung und $1/\kappa_i$ ist das Analogon zur Varianz $\sigma_{\varphi,i}^2$ der Normalverteilung und beschreibt die Konzentration der Verteilung. Abhängig von der Frequenz der Mustersequenz kann daraus nun die Verteilungsfunktion der codierten Koordinate x abgeleitet werden. Mit $\varphi_i(x) = 2\pi f_i x$ und bei bekannter Frequenz f_i erhält man die multimodale Von-Mises-Verteilung auf dem periodischen Intervall $x \in [0, 1)$:

$$p(x|\varphi_i, \kappa_i, f_i) = \frac{e^{\kappa_i \cos(2\pi f_i x - \varphi_i)}}{I_0(\kappa_i)}. \quad (3)$$

Durch den nun multimodalen Charakter der Verteilung wird die Mehrdeutigkeit der Phasenmessung anschaulich in der Dichtefunktion sichtbar, siehe Abb. 2. Das Phasenrauschen σ_φ bleibt in jeder Messung gleich, wird aber durch die Variablensubstitution lokal um $1/f_i$ reduziert, was wiederum durch eine f_i -fache Mehrdeutigkeit erkauft wird.

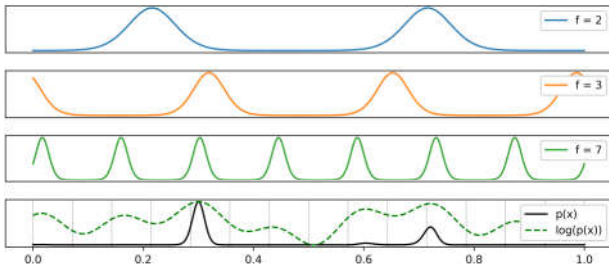


Abb. 2 Oben: Unsicherheit der Phasenmessungen modelliert durch zirkuläre Wahrscheinlichkeitsdichten. Unten: Verbundwahrscheinlichkeit und Log-Dichte.

Abhängig von der gewählten Frequenz der Sinus-Mustersequenz korrespondiert jede Phasenmessung φ_i zu einer eigenen Verteilung $p(x|\varphi_i, \kappa_i, f_i)$. Da jeder Phase dieselbe Koordinate zugrunde liegt und diese unabhängig voneinander gemessen werden, kann die Verbunddichte von x bei gegebenen Frequenzen f_i , Phasenmessungen φ_i und geschätzten Konzentration κ_i berechnet werden:

$$p(x) = \prod_i p(x|\varphi_i, \kappa_i, f_i) = \frac{e^{\sum_i \kappa_i \cos(2\pi f_i x - \varphi_i)}}{\prod_i I_0(\kappa_i)}. \quad (4)$$

Die optimale Koordinate und damit die simultane Entfaltung aller Phasenmessungen kann nun mit einem *Maximum-Likelihood*-Schätzer gefunden werden. Maximieren der Log-Dichtefunktion liefert die gesuchte Koordinate $\hat{x}_{ML} = \arg_x \max \log(p(x))$ mit

$$\hat{x}_{ML} = \arg \max_x \sum_i \kappa_i \cos(2\pi f_i x - \varphi_i). \quad (5)$$

Obwohl die Gleichung einfach erscheint, lässt sich aufgrund der vielen Extrema keine analytische Lösung für das globale Maximum angeben. Das Problem muss daher numerisch gelöst werden. Um sicherzustellen, dass das Maximum der Wahrscheinlichkeit jedes Mal gefunden wird, lösen wir das Problem auf Teilintervallen. Mit der maximalen Frequenz von Glg. (5) und mithilfe des Abtasttheorems ergibt sich eine minimal notwendige Intervallanzahl $I_{\min} = 2f_{i,\max}$, in der das globale Maximum eindeutig als einzelnes Extremum liegen muss. Mit einem einfachen 1D-Liniensuchverfahren werden nun die lokalen Maxima gefunden. Ein Vergleich der Intervalle liefert letztlich das globale Maximum, damit den wahrscheinlichsten Wert der Koordinate x und kompensiert dabei simultan die Faltung aller Phasen.

3 Ergebnisse

Abb. 3 zeigt eine Messung mit $f_i = 1, 3, 5$ und einem Phasenrauschen von $\sigma_\varphi = 0,3$. Der Vergleich mit einer hierarchischen [4] und einer zahlentheoretischen Methode [2] macht die Vorteile der auf zirkulären Wahrscheinlichkeitsdichten basierenden Phasenentfaltung deutlich. Das gleichzeitige Nutzen der Information aller Phasenmessungen und die damit implizite Entfaltung kann die Zuverlässigkeit stark erhöhen. Dies führt zu einer höheren Robustheit gegenüber Rauschen als die herkömmlichen Verfahren und damit zu besseren Messergebnissen.

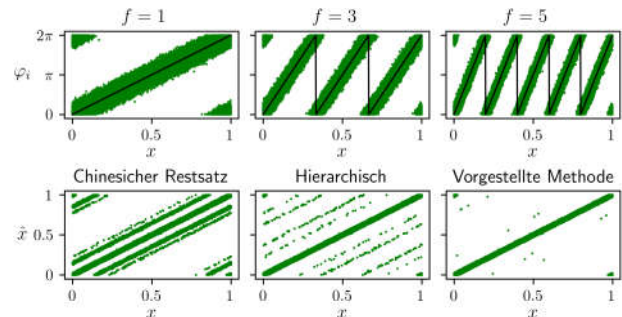


Abb. 3 Oben: Phasenmessung. Unten: Ergebnis der Phasenentfaltung mit verschiedenen Algorithmen.

Literatur

- [1] M. Fischer, M. Petz, and R. Tutsch, "Model-based noise prediction for fringe projection systems - A tool for the statistical analysis of evaluation algorithms," *TM-Technisches Messen* **84**(2), 111–122 (2017).
- [2] C. Zuo, L. Huang, M. Zhang, Q. Chen, and A. Asundi, "Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: A comparative review," *Optics and Lasers in Engineering* **85**, 84–103 (2016).
- [3] S. R. Jammalamadaka and A. SenGupta, *Topics in Circular Statistics* (World Scientific, 2001).
- [4] E. Lilienblum and B. Michaelis, "Optical 3D Surface Reconstruction by a Multi-Period Phase Shift Method," *Journal of Computers* **2**(2) (2007).