

Geodäten auf der Fläche der stationärer Phase zweier verdrehter Spalte, Teil 3.

W.Dultz, E.Frins*, B.Hils, H.Schmitzer**

Univ. Frankfurt, Univ. *de la Republica Montevideo, **Xavier Univ. Cincinnati
[requalivahanus\(Affenschaukel\)t-online.de](http://requalivahanus(Affenschaukel)t-online.de)

Um ein Gefühl für die klassischen Photonentrajektorien im Gebiet der stationären Phase eines monochromatischen Lichtstrahls zwischen zwei verdrehten Spalten zu gewinnen, berechnen wir die Geodäten auf dieser gewundenen Fläche mit Hilfe der Differentialgeometrie in krummlinigen Koordinaten und finden, daß sie den Ort der maximalen Wellenamplitude kennzeichnen.

Der Huygenssche Elementarwellenansatz ist Grundlage für das Verständnis der Bewegungsabläufe von Quantenteilchen und selbst in der Quantenfeldtheorie noch gut erkennbar. Im Vergleich zu Teilchentheorien, wie der von de Broglie und Bohm, führt er nicht zu distinkten Teilchenbahnen, sondern beschreibt die Wahrscheinlichkeit mit der sich die Elementarteilchen im Raum aufhalten. Besonders deutlich wird das bei der Berechnung mit Hilfe der Pfadintegrale, bei der die Welle jeden beliebigen Weg nimmt und dabei nur mit der kanonischen Form der Wirkung gewichtet wird. Die Summe aller dieser Beiträge führt zum Gebiet der stationären Phase im Raum, in dem sich die einzelnen Wellen nicht weg interferieren sondern konstruktiv verstärken und das die höchste Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen – und somit ihren „klassischen Weg“ kennzeichnet. In der Optik entspricht dies dem Fermatschen Prinzip, das den Weg des Lichtes durch das abbildende System zwischen Quelle und Bild beschreibt.

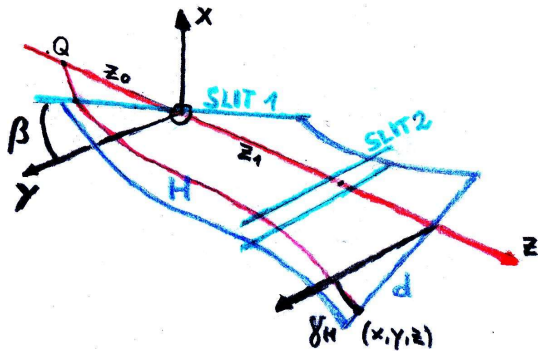


Abb.1 Geometrie der Fläche stationärer Phase H zweier verdrehter Spalte.

Das Gebiet der stationären Phase eines Lichtbündels nach zwei um den Winkel β gegeneinander verdrehten Spalten und seine analytische Fortsetzung ist eine gewundene Fläche H Abb.1, die wir mit dem Elementarwellenansatz berechnet (1) und dann experimentell verifiziert haben [1,2]. Die Geodäten könnten die Photonentrajektorien auf dieser Fläche sein Abb.2, da sie die geradesten möglichen Linien (geodätische Krümmung

Surface of Stationary Phase H

$$x = -\frac{\sin(2\beta)z_0}{4bz_1(z_0+z_1)}y = \tan(\gamma_H)y; \quad (1)$$

$$b = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{(z-z_1)} - \frac{\cos^2(\beta)z_0}{2z_1(z_0+z_1)};$$

$$\bar{x}(y, z) = \left(\frac{-\sin(2\beta)z_0}{4bz_1(z_0+z_1)}y, y, z \right);$$

Metric Tensor, orthogonal coordinates (d, z):

$$\bar{x}(d, z) = (d \sin(\gamma_H), d \cos(\gamma_H), z); \quad (2)$$

$$g_{11} = g_{dd} = 1; \quad g_{22} = g_{zz} = d^2(\partial\gamma_H/\partial z)^2 + 1;$$

$$g_{12} = g_{z1} = g_{dz} = 0;$$

Christoffel Symbols: (3)

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{dd}^d = 0; \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{dd}^z = 0; \quad \Gamma_{22}^d = \Gamma_{zz}^d = -d(\partial\gamma_H/\partial z)^2;$$

$$\Gamma_{22}^z = \Gamma_{zz}^z = \frac{1}{2(1+d^2(\partial\gamma_H/\partial z)^2)} \partial/\partial z (1+d^2(\partial\gamma_H/\partial z)^2);$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{z1}^1 = \Gamma_{dz}^1 = 0; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{z1}^2 = \Gamma_{dz}^2 = \frac{d(\partial\gamma_H/\partial z)^2}{(1+d^2(\partial\gamma_H/\partial z)^2)};$$

Metricity Condition: $g_{\mu\nu, \rho} = 0$ valid;

$$\text{Geodesics: } \partial^2 d/\partial z^2 = 2\Gamma_{z1}^2(\partial d/\partial z)^2 + \Gamma_{22}^z \partial d/\partial z - \Gamma_{22}^1;$$

$\kappa_g = 0$) sind [3][4§49]. Wir berechnen sie hier mit Hilfe der Tensorrechnung und diskutieren ihre Bedeutung.

Den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ (2) von H finden wir durch Einführen der orthogonalen Koordinatenlinien (d, z) auf H; dann bilden wir die partiellen Ableitungen (Tangenten) und deren Produkte [4 §26,27], wobei d der Abstand des Aufpunktes (x, y, z) von der optischen Achse z ist, Abb.1.

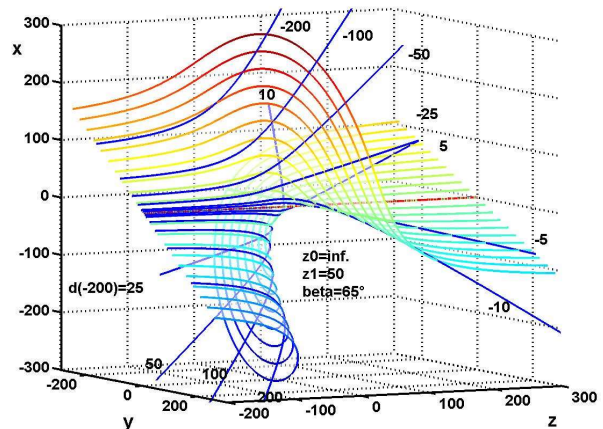


Abb.2 Geodäten und H im R3. Die Geodäten werden durch ihre Anfangswerte bezeichnet.

Die Christoffelsymbole (3) berechnen sich aus den partiellen Ableitungen des metrischen Tensors (2) [4 §47]. Die Geodätengleichung (3) ist eine Differentialgleichung 2ter Ordnung [4 §50 (50.2)] die wir mit ode45 von MATLAB und den durch den Ort der Quelle Q (Startpunkt $d(z=0)$ und Startrichtung $d(0)/z_0$) gegebenen Anfangswerten numerisch lösen und so die Geodäte $d(z)$ erhalten, die sich der

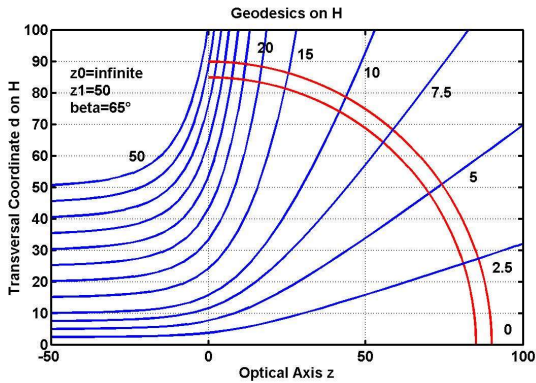


Abb.3 Geodäten auf H mit zwei Phasenfronten (rot) des Fernfeldes.

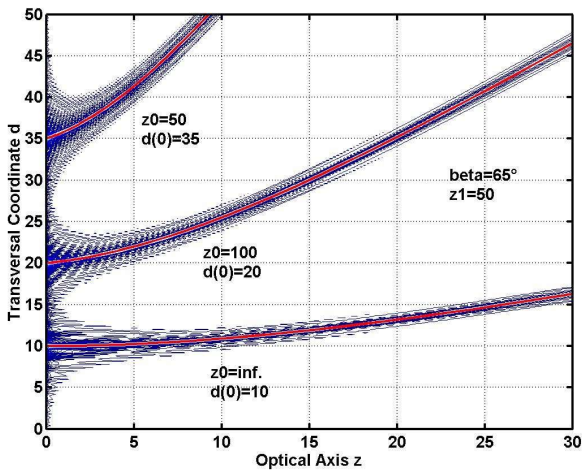


Abb.4 Amplitude einer Lichtwelle ausgehend vom Ort $d(0)$ auf Spalt 1 mit Punktquelle bei z_0 auf der optischen Achse Abb.1. Geodäten (rot) auf H.

schraubenförmig gewundenen Fläche H anschmiegt Abb.2. Bei einer Teilchentrajektorie entsprechen die Randbedingungen dem Ort und der Impulsrichtung am Anfang. Nach den Spalten weiten sich die Geodäten breitfächerig auf H aus, wie man es für das Licht erwarten würde. Abb.3 zeigt die Geodäten auf der Fläche H, abhängig von z und d . Kreise um den Nullpunkt $d(0)=0$ im Fernfeld ($z \gg d(0)$) stehen senkrecht auf den Geodäten und bezeichnen damit die Phasenfronten. Die Geodäten (rot) über den Höhenlinien der Amplitude der Lichtwellen auf H, die von einer Punktlichtquelle bei z_0 auf dem Spalt 1 ausgehen, zeigt Abb.4. Die Berechnung der Amplituden erfolgte nach dem Schema von Ref.[1]. Wir sehen eine

perfekte Übereinstimmung als deutlichen Hinweis, daß die berechneten Teilchenbahnen auf den Geodäten der Fläche H der stationären Phase verlaufen.

Geodäten sind die geradesten Linien im Raum, auf denen sich kräftefreie Teilchen geradeaus bewegen. In der Allgemeinen Relativitätstheorie bewegen sich kräftefreie Massen auf den krummlinigen Koordinaten der Raum-Zeit, hier bei uns die Photonen kräftefrei auf den Geodäten der durch die Beugung erzeugten Fläche H der stationären Phase. Wir wollen zum Schluß noch ein anschauliches Modell für eine „Geodäte“ vorstellen:



Abb.5 Spielzeuglokomotive auf dem „Geradeauskurs“ einer Geodäte bei „komplexer Massenverteilung“ auf einem Teppich. Ihr Kurs auf diesem Teppich ist oft brezelähnlich aber nie exakt reproduzierbar.

Eine kleine elektrische Lokomotive mit starren Achsen, die ohne Gleise einen krummen Weg auf einem Perserteppich zurücklegt. Auf einem glatten Boden sollte sie geradeaus fahren, aber die komplexe „Massenverteilung“ im Raum (hier die Ungleichmäßigkeiten des handgeknüpften Teppichs und das Spiel der Räder) zwingen ihr „krummlinige Koordinaten“ - einen brezelförmigen Kurs - auf, Abb.5.

Literatur

- [1,2] E.Frins et al. DGAO-Proceedings (2018/19).
- [3] J.Anderson, Principles of Relativity Physics §2-3.
- [4] E.Kreyszig, Differential Geometry 1959.

Danksagung

E.Frins. dankt dem PEDECIBA für seine Unterstützung. H.Schmitzer thanks the John Hauk foundation for ongoing support.