

# Von differenzierbarer Modellierung zur Systemoptimierung mittels Geometrischer Algebra am Beispiel von Lichtschnittsystemen

Simon Hartel, Christian Faber

Hochschule Landshut – University of Applied Sciences

<mailto:simon.hartel@haw-landshut.de>

Modellbasierte Optimierung ermöglicht eine effiziente Auslegung optischer Mess- und Bildverarbeitungssysteme. Dieser Beitrag zeigt, wie hierfür Modellierung und Gradientenoptimierung durch geeignete Werkzeuge – insbesondere *Geometrische Algebra* und *Automatisches Differenzieren* – erleichtert werden und wie sich damit auch binäre Gütekriterien differenzierbar formulieren lassen.

## 1 Einführung

Modellbasierte Optimierverfahren ermöglichen als Alternative und Ergänzung zu reinem Expertenwissen eine schnellere, effizientere und innovativere Systemauslegung kamerabasierter optischer 3D-Messtechniken – wie beispielsweise Stereo Vision, Deflektometrie, Streifenprojektion oder Lichtschnitt.



Abb. 1 Lichtschnittsystem als Beispielanwendung. [1]

Anhand eines Messsystems, das mittels mehrerer Lichtschnittsensoren die Kontur eines Messobjekts vollständig erfassen soll (vgl. Abb. 1), werden Werkzeuge und Methoden vorgestellt, die den Prozess [2,3] aus *Modellierung*, *Gradientenoptimierung* und Formulierung von differenzierbaren *Zielfunktionen* erleichtern und verallgemeinern (vgl. Abb. 2).

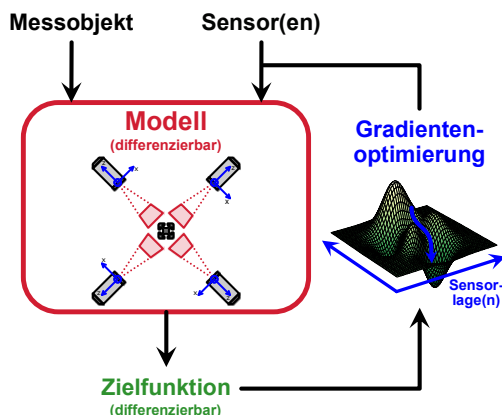


Abb. 2 Modellbasierte Gradientenoptimierung nach [2].

## 2 Modellierung mit Geometrischer Algebra

Orientierte *Plane-based Geometrische Algebra* (PGA) [4,5,6]  $\mathbb{R}_{n,0,1}^*$  mit  $e_i^2 = 1$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  und  $e_0^2 = 0$  ermöglicht eine elegante und vereinheitlichende Darstellung der  $n$ -dimensionalen Euklidischen Geometrie. Das relevante Systemverhalten des Lichtschnittsystems aus Abb. 1 lässt sich vollständig in der Ebene der Sensormessfelder beschreiben („Blick von vorne“), weshalb für diese Beispielanwendung  $n = 2$ , also *2D-PGA*, ausreicht.

Die Sensorlagen der einzelnen Lichtschnittsensoren (Transformationen) werden in PGA mittels *Motoren*

$$m = e^{ae_1^* + be_2^* + ce_0^*} \quad (1)$$

dargestellt, deren Koeffizienten (= Freiheitsgrade)  $a$ ,  $b$  und  $c$  optimiert werden (mit „\*“ als *Dualitätsoperator*) [3,7]. Die Eckpunkte  $P_k$  des Messfelds können einfach mittels dem *join-Produkt* „ $\vee$ “ zu den Linien

$$l_k = P_k \vee P_{k+1} \quad (2)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ) verbunden werden (vgl. Abb. 3). Aufgrund der inhärent orientierten Geometrie lässt sich direkt anhand von Vorzeichen feststellen, ob ein Punkt  $Q$  im Messfeld liegt:

$$\text{sign}(l_k \vee (mQ\tilde{m})) \stackrel{?}{=} \text{const.} \forall k. \quad (3)$$

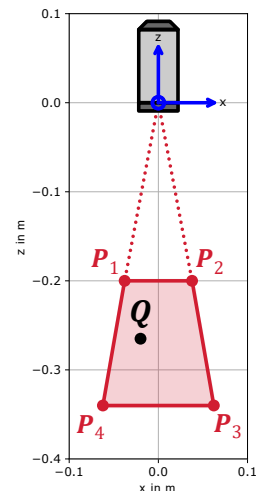


Abb. 3 Sensormodell. [8]

## 3 Gradientenoptimierung über KI-Framework

Da die *Backpropagation Neuronaler Netze* eine Gradientenoptimierung ermöglicht, enthalten KI-Frameworks wie *TensorFlow* oder *PyTorch*, angetrieben von der aktuellen Entwicklung im Maschinellen Lernen, leistungsfähige Algorithmen für *Automatisches Differenzieren*, *Gradientenoptimierung* und *GPU-Unterstützung*. Durch die Implementierung der Modellierung in diesen Frameworks kann direkt auf diese Funktionen zurückgegriffen werden.

## 4 Formulierung der Zielfunktion

### 4.1 Samplingstrategie beim Raytracing

Statt beim Raytracing wie üblich die Lichtquelle (Lichtstrahlen) oder Kamera (Sichtstrahlen) abzutasten, kann es je nach Gütekriterium sinnvoll sein, vom Messobjekt aus zu starten – insbesondere zur Bestimmung der Messobjektdeckung. Dadurch liegen direkt an allen Messobjektpunkten die benötigten Daten und Gradienten für die Optimierung vor. Für das Beispiel der Lichtschnittsysteme werden Licht- und Sichtstrahlen von der abgetasteten Messobjektkontur (vgl. Abb. 4) für das Raytracing herangezogen.

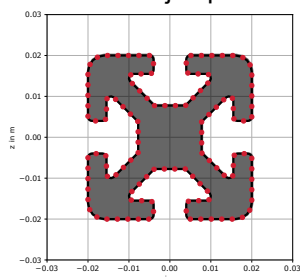


Abb. 4 Messobjektsampling. [8]

### 4.2 Berücksichtigung binärer Gütekriterien

Aufgrund der stückweise konstanten Bereiche binärer Masken führen diese zu verschwindenden (oder unendlichen) und somit unbrauchbaren Gradienten. Stattdessen lassen sich binäre Begrenzungen durch einen *vorzeichenbehafteten Abstand* approximieren, der dank orientierter PGA einfach bestimmt werden kann. Dieser Abstand lässt sich anschließend verzerren oder normieren, beispielsweise mit einer Sigmoid-Funktion (vgl. Abb. 5).

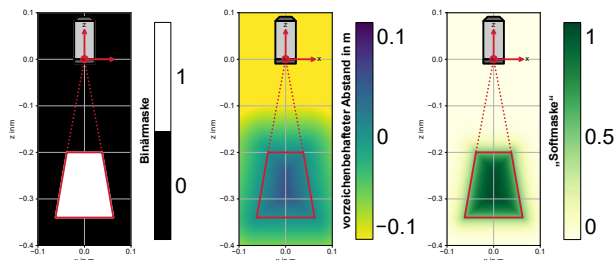


Abb. 5 Von Binärmaske (3) über vorzeichenbehafteten Abstand zur differenzierbaren „Softmaske“. [8]

Abschattungen durch das Messobjekt sind analog mit einer derartigen „Softmaske“ für das Messobjekt zu modellieren. Das differenzierbare Gütekriterium misst, wie viel ein Lichtstrahl zwischen Sensor und Messobjekt von dieser „Softmaske“ aufammelt.

## 5 Anwendungsbeispiele

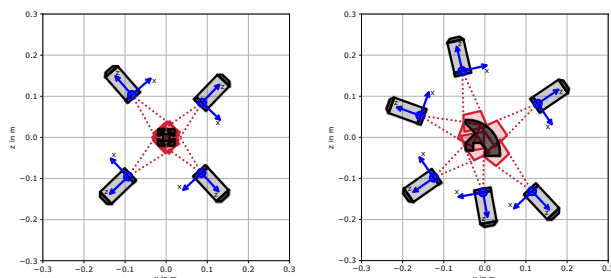


Abb. 6 Optimiertes Lichtschnittsystem für das Messobjekt aus Abb. 4 mit Abb. 2 als Startlösung sowie für ein weiteres asymmetrisches Messobjekt. [8]

Abb. 6 zeigt beispielhaft mit den aufgezeigten Werkzeugen und Methoden optimierte Lichtschnittsysteme für zwei verschiedene Messobjekte mit unterschiedlicher Anzahl an Einzelsensoren.

## 6 Zusammenfassung

Dieser Beitrag zeigt, wie optische Mess- und Bildverarbeitungssysteme elegant und verallgemeinert mittels orientierter Plane-based Geometrischer Algebra modelliert und effizient über die „Zweckentfremdung“ von KI-Frameworks optimiert werden können. Zudem wurde aufgezeigt, wie mit diesen Werkzeugen binäre Gütekriterien als „Softmasken“ (= Abstandsfunktion) differenzierbar berücksichtigt werden können und dass die Wahl der Samplingstrategie beim Raytracing für die Formulierung von Zielfunktionen entscheidend ist.

Die vorgestellten Werkzeuge und Methoden wurden exemplarisch am Beispiel von Lichtschnittsystemen demonstriert, lassen sich jedoch ebenso auf deutlich komplexere optische Mess- und Bildverarbeitungssysteme übertragen. Weiterführende Informationen sind in [8] zu finden.

## Literatur

- [1] Micro-Epsilon Messtechnik GmbH & Co. KG: Bildmaterial, mit freundlicher Erlaubnis
- [2] S. Hartel, C. Faber: “Combining simulation and optimization: Multipurpose modelling of camera-based optical metrology systems”, *Proceeding 124. DGaO*, B8 (2023)
- [3] S. Hartel, C. Faber: “Using geometric algebra to create differentiable models for optimizing camera-based optical metrology systems”, *Proceeding 60<sup>th</sup> Ilmenau Scientific Colloquium*, 4.2.096 (2023)
- [4] W. Clifford: “Applications of Grassmann’s extensive algebra”, *American Journal of Mathematics*, 1(4): pp. 350-358 (1878)
- [5] L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann: “Geometric Algebra for Computer Science: An Object-oriented Approach to Geometry” (Elsevier, 2009)
- [6] L. Dorst, S. De Keninck: “A Guided Tour to the Plane-Based Geometric Algebra PGA”, version 2.0 (2022), <https://geometricalgebra.net> und <https://bivector.net>
- [7] S. Hartel, C. Faber: “Shedding new light on ray tracing for optical metrology systems by using Geometric Algebra”, *Proceeding 123. DGaO*, A21 (2022)
- [8] S. Hartel, C. Faber: “From differentiable modelling to system optimization: The full journey using Geometric Algebra exemplarily applied to improve light sectioning systems”, *Technisches Messen*, Sonderband DGaO 2025 (tbp)

## Förderung

Dieser Beitrag wurde durch das *Bayerische Staatsministerium für Wirtschaft, Landesentwicklung und Energie* im Rahmen des Projekts *KISSMe3D* (DIK-2105-0028 / DIK0267/02) und der Förderlinie *Digitalisierung – Informations- und Kommunikationstechnologie (IuK)* gefördert.